数理解析研究所講究録
963巻 1996年 142-151

Univalent Mappings of Several Complex Variables

東京電機大学工学部　鶴見 和之
(Kazuyuki Tsurumi)

本講では，$\mathbb{C}^n$ の単位球 $\mathbb{B}$ 上の単葉写像族の中で重要な役割を演ずる starlike, convex 及び Φ-like である写像の定義及びそれらに関連する定理を与える。

これらの写像は1変数の単葉函数の拡張として得られたものであるが，1変数の諸定理の多変数（Hilbert 空間，Banach 空間も含めて）への拡張もあまり進んでおらず，また，多変数の写像として，1変数とは異る性質もあまり得られていない様に思います。

記号：

$\mathbb{C}^n$ の点を列ベクトル $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ で表し，次の記号を用いる：

$z' := (z_1, \cdots, z_n)$（転置），　$z^* := (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$（転置共役）

$$\|z\| := \sqrt{z^* z} := \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

$\mathbb{B} := \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1 \}$

$\mathbb{C}^n$ の領域から $\mathbb{C}^n$ への写像 $f(z) := \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$ (列ベクトルで表す) に対して

$$Df(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad \text{(Jacobian行列)}$$

$J_f(z) := \det(Df(z))$ （f の Jacobian）

$J_f(z) \neq 0 \rightleftarrows f(z)$ は局所単葉である。

$\mathcal{H}(\mathcal{D})$: 領域 $\mathcal{D}$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像の全体

$\mathcal{S}(\mathcal{D})$: 原点 0 を含む領域 $\mathcal{D}$ から $\mathbb{C}^n$ への正規化された ($f(0)=0$, $Df(0)=I$ (単位行列)) 単葉写像 $f(z)$ の全体.

§1. Starlike mappings

1.1. <u>定義</u>[17] $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{B})$ が <u>starlike</u> であるとは, $\forall t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ に対して, $tf(\mathbb{B}) \subset f(\mathbb{B})$ (tf は f に subordinate である, これを $tf \prec f$ と表す) となるとき.

$S^*(\mathbb{B})$: $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ の starlike mappings の全体.

このとき, 次の定理が成り立つ:

1.2. 定理 ([7], [11], [12]) $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ を正規化された写像で, $J_f(z) \neq 0$ in $\mathbb{B}$ とする。このとき,

$$f(z) \in S^*(\mathbb{B}) \rightleftarrows \operatorname{Re} z^*(Df(z))^{-1}f(z) > 0 \quad (\forall z \in \mathbb{B}, \neq 0)$$ ┘

この定理は最初, 松野[7]によって与えられ, 後に, 菊地[6], Suffridge [11], [12] によって再考察され, Hilbert 空間に拡張された([12])。(また, polydisk に対しても同様の定理が成り立つ [11]。) この定理は1変数の場合の直接の拡張である, 表現法も簡単で starlike の判定法としては使い易いものである。

この定理により, starlike な写像に対する次の増大定理が成り立つ:

1.3. 定理 ([1], p.16). $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ とする。このとき, 次の式が成り立つ:

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leqq \|f(z)\| \leqq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}$$

┘

1.4. 系. $S^*(\mathbb{B})$ は ($\mathcal{H}(\mathbb{B})$ 内の部分集合として) compact uniform topology で compact である。 ┘

また, 次の radial growth に関する定理が成り立つ:

1.5. 系（[13]） $f(z)\in S^*(\mathbb{B})$ は Hayman index $\alpha>0$ を持つとする。 この時次の様な方向 $a\in\mathbb{C}^n$ （$\|a\|=1$）が存在する：

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^2\|f(xa)\|=\alpha$$

（この方向 a はただ1つとはかぎらない）。 ┘

1.6. 例.

(1) $\mathbb{C}^2$ において

$$f(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{z_1}{(1-z_1)}\\[2ex]\dfrac{z_2}{(1-z_1)}\end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{z_1}{(1-z_1)^2}\\[2ex]\dfrac{z_2}{(1-z_2)^2}\end{pmatrix}$$

(3) $$f(z)=\frac{1}{(1-\zeta^* z)}z$$

（$\zeta\in\mathbb{C}^n$, $\|\zeta\|=1$）

(4) $$f(z)=\frac{1}{(1-\zeta^* z)^2}z$$

(5) $$f(z)=\frac{1}{1-z'z}z$$

(6) $$f(z)=\frac{4}{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z'z)^n}{2n+1}\right\}z$$ ┘

本節の諸定理は一般の Hilbert 空間, Banach 空間に拡張できる。

§2. Convex mappings

写像 $f(z)\in\mathcal{S}(\mathbb{B})$ に対して，$f(\mathbb{B})$ が $\mathbb{C}^n$ の凸領域となるとき，$f(z)$ は <u>convex</u> in $\mathbb{B}$ であるという。1変数の場合には，単位円上の正規化された正則函数 $f(z)$ が convex であるための必要十分条件は，$\mathcal{R}e(1+zf''/f')>0$ となることである。この定理の $\mathbb{C}^n$ への拡張は最初，松野[7]によって与えられ，後，菊地[6]，Suffridge[11]，[12]によって再構成された。これは次の様に与えられる：

<u>2.1. 定理</u>([7],[6]). $f(z)\in\mathcal{S}(\mathbb{B})$ が convex である

$$\iff \mathcal{R}e\left\{1-z^*(Df(z))^{-1}D^2f(z)\alpha^2\right\}>0 \quad (\alpha\in\mathbb{C}^n,$$

$$\|\alpha\|=1 \text{ s.t. } \mathcal{R}e\, z^*\alpha=0).$$

ここで，$\alpha^2:=(\alpha_1^2,\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_1\alpha_n,\alpha_2\alpha_1,\cdots,\alpha_n^2)'$

$$D^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2},\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2},\cdots\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial z_k},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\right)$$

□

この定理を用いて，R.W. Barnard, C.H. Fitzgerald and S. Gong [2] は $\mathbb{C}^2$ における歪曲定理を与えている。

2.2. 定理（[2]，p.921） $f(z)\in\mathcal{S}(\mathbb{B})$ が convex in $\mathbb{B}$ ならば，次の式が成り立つ：

$$\frac{(1-\|z\|)^{0.261}}{(1+\|z\|)^{3.261}}<|J_f(z)|<\frac{(1+\|z\|)^{0.261}}{(1-\|z\|)^{3.261}},$$

$$|\arg J_f(z)|<1.761\log\left(\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}\right)$$

□

また，或る種のBanach空間においては，convex mappingは線型写像となる，様な例もあり，convex mappingに関する諸定理を一般のHilbert空間，Banach空間に拡張した場合に意味があるか，ないかを調べておくことが必要である。

§3. Φ-like mappings

Φ-like analytic function の概念は spirallike の概念の拡張として，Brickman [3] によって与えられた。これを Gurganus [4] は $\mathbb{C}^n$ 及び Banach 空間に拡張した。これは，初期値問題として与えられるもので，広い応用面がある様に思うし，単葉函数（写像）族としても最も広いものである。

3.1. 定義. $\mathcal{D}$ を原点を含む $\mathbb{C}^n$ の領域とし，$\Phi(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ を，$\Phi(0)=0$，$\mathcal{R}e\, z^* D\Phi(0) z > 0$ $(z \in \mathbb{C}^n, \neq 0)$ とする。

(a) $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$，$f(0)=0$，$Df(0)=I$ (identity matrix) $J_f(z) \neq 0$ in $\mathbb{B}$，$f(\mathbb{B})$ は Φ の定義域に含まれるとする。このとき，$f(z)$ が Φ-like in $\mathbb{B}$ であるとは，

$$\mathcal{R}e\,\left(z^* (Df(z))^{-1} \Phi(f(z))\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{B}, \neq 0)$$

となるものである。

(b) 領域$\mathcal{D}$が<u>Φ-like</u>であるとは，$\forall X \in \mathcal{D}$に対して初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -\Phi(w(t)) \quad , \quad w(0) = X$$

が解 $w(t) \in \mathcal{D}$ $(t \geqq 0)$, $w(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ を持つときである。（ここで解 $w(t)$ が存在すればただ1つである。）

<u>3.2. 定理</u>.（[4]）

(a). $f(z)$: Φ-like in $\mathbb{B}$ $\Rightarrow$ $f(z)$: 単葉で，$f(\mathbb{B})$ は Φ-like domain in $\mathbb{C}^n$ である。

(b). $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$, $f(\mathbb{B})$: Φ-like domain in $\mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ $f(z)$: Φ-like mapping

$\lrcorner$

<u>3.3. 系</u> $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$.

$f(z)$: $\mathbb{B}$ で単葉 $\rightleftarrows$ 或るΦに対して，$f(z)$ は Φ-like.

<u>3.4. 系</u> $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ $\rightleftarrows$ $f(z)$: I-like

$(\Phi(z) = Iz)$

$\lrcorner$

$$A = U^* \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} U, \quad (U:\text{unitary}行列,\ 各固有値の実部\ \mathrm{Re}\,\lambda_j > 0\ )$$

とし, $\Phi(z) = Az$ のとき, この Φ-like mapping を <u>spirallike</u> in $\mathbb{B}$ という。

本節の諸概念は, 勿論, 一般の Banach 空間に拡張出来るが, 函数論的諸性質がどうなっているかはほとんど知られていない, 例えば, Rudin の本[10]にあがっている問題の類似はどうか等.?

文　献

[1] R.W. Barnard, C.H. Fitzgerald, and S. Gong : The growth and $\frac{1}{4}$-theorems for starlike functions in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. M. 150 (1991) 13−22.

[2] R.W. Barnard, C.H. Fitzgerald, and S. Gong : A distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$, Trans. A.M.S. 344 (1994), 907−924.

[3] L. Brickman : Φ-like analytic functions I, Bull. A.M.S. 79 (1973) 555−558.

[4] K. Gurganus; Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. A.M.S. 205 (1975) 389−406.

[5] L.F. Heath and T.J. Suffridge : Starlike, convex close-to-convex, spirallike, and Φ-like maps in a commutative Banach algebra with identity, Trans. A.M.S. 250 (1979) 195−212.

[6] K. Kikuchi : Starlike and convex mappings in several complex variables, Pacific J. M. 44 (1973) 569−580.

[7] T. Matsuno : On starlike theorems and convex-like theorems in the complex vector space, Sci.

Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, A. 5 (1955) 88-95.

[8] J. A. Pfaltzgraff : Subordination chains and univalence of holomorphic mappings on $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 210 (1974) 55−68.

[9] J. A. Pfaltzgraff and T. J. Suffridge : Close-to-starlike holomorphic functions of several variables, Pacific J. M. 57 (1975) 271−279.

[10] W. Rudin : Function Theory in the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag. 1980.

[11] T. J. Suffridge : The principle of subordination applied to functions of several variables, Pacific J. M. 33 (1970) 241−248.

[12] T. J. Suffridge : Starlike and convex maps in a Banach space, Pacific J. M. 46 (1973) 575−589.

[13] 鶴見和之 : Radial growth of starlike holomorphic mappings in the unit ball in $\mathbb{C}^n$, 数理解析研究所講究録 946 (1996年4月). 61−69.